Analiza funkcjonalna
Lista 4

Zad 1. Pokazać, że operator $X \to Y$ jest ograniczonym operatorem liniowym i obliczyć jego normę.

N	X	Y	A
1.	l_3	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)t^k}{2^k}$
2.	$L_2[-1,1]$	l_1	$Ax = \left(\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} tx(t)dt, ..., \frac{1}{3^k}\int_{-1}^{1} t^k x(t)dt, ...\right)$
3.	$C[-1,1]$	l_1	$Ax = \left(\frac{1}{3}\int_{-1}^{1} tx(t)dt, ..., \frac{1}{3^k}\int_{-1}^{1} t^k x(t)dt, ...\right)$
4.	$C^{(1)}[0,2]$	$C^{(1)}[0,1]$	$(Ax)(t) = tx(t^2+1)$
5.	$C[-17,13]$	$L_{\frac{5}{2}}[0,1]$	$(Ax)(t) = \int_0^1 (t+s)x(\sqrt{s})\, ds + 3x(0)$
6.	l_2	c	$(Ax)(t) = \left(\frac{x(1)}{1}, \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3}, ...\right)$

Zad 2. Wykazać, ośrodkowość przestrzeni c_0, c, l_p, gdzie $1 \leq p < \infty$. Pokazać, że przestrzeń l_∞ ośrodkową nie jest.

Zad 3. Wykazać, izometryczny izomorfizm podanych przestrzeni: $c_0^* \cong l_1$, $c^* \cong l_1$, $l_1^* \cong l_\infty$ oraz $l_p \cong l_q$, gdzie $1 \leq p < \infty$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Czy przestrzenie c_0, c są refleksywne ?

Zad 4. Obliczyć normę funkjonału $f : X \to \mathbb{C}$ danego wzorem

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x(k), \qquad x = (x(1), x(2), ...) \in X,$$

gdzie $X = c_0$, c, l_p dla $1 \leq p \leq \infty$.

Zad 5. Niech $K : C[0,1] \to C[0,1]$. Wykazać, że operator K jest ciągły i odwracalny. Znaleźć K^{-1} oraz obliczyć promień spektralny $r(I-K)$, gdy

a) $(Kx)(t) = x(t) + \frac{1}{5}\int_0^1 e^{t+s}x(s)ds$

b) $(Kx)(t) = x(t) - \int_0^1 s^2(t+1)x(s)ds$

Zad 6. Rozważmy w przestrzeni $C[0,1]$ równanie postaci

$$(A - \lambda 1)x = y, \qquad x, y \in C[0,1].$$

Wyznaczyć wszystkie parametry λ takie, że powyższe równanie posiada dla każdego y dokładnie jedno rozwiązanie x, jeśli

a) $(Ax)(t) = \int_0^1 e^{t+s}x(s)ds$

b) $(Ax)(t) = \int_0^1 (s^2 t + 1)x(s)ds$

c) $(Ax)(t) = \int_0^1 (s^2 t + t^2 s)x(s)ds$

d) $(Ax)(t) = \int_0^1 (st - e^t)x(s)ds$

Obliczyć widmo $\sigma(A)$ oraz promień spektralny $r(A)$ operatora A.